ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ
Φύλλο 7ο Απρίλιος 2024

ΚΟΛΛΕΓΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Ελληνο-Αμερικανικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Γυμνάσιο Κολλεγίου Αθηνών

## Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή

Το έτος 2023 ήταν αφιερωμένο πανελληνίως ως έτος Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή λόγω των 150 χρόνων από τη γέννηση του μεγάλου Έλληνα μαθηματικού.

Γεννημένος στις 13 Σεπτεμβρίου του 1873, ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή είναι μία από τις σημαντικότερες μαθηματικές και επιστημονικές προσωπικότητες του 19ου και 20ου αιώνα.

Μεγάλωσε στις Βρυξέλλες σε επιστημονικό και αριστοκρατικό περιβάλλον, γεγονός που βοήθησε την εκπαίδευσή του. Όταν μετακόμισε στην Αίγυπτο για να δουλέψει ως μηχανικός το 1898 συνειδητοποίησε την αγάπη του για τα Μαθηματικά και το 1900 εγκατέλειψε το επάγγελμά του με σκοπό να σπουδάσει Μαθηματικά στη Γερμανία. Στο πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν έκανε τη διδακτορική του διατριβή και δίδαξε μέχρι το 1908. Το 1920 με πρόσκληση του Ελ. Βενιζέλου ανέλαβε να οργανώσει το Ιωνικό Πανεπιστήμιο στη Σμύρνη, όπου και έμεινε μέχρι την ήττα των ελληνικών στρατευμάτων το 1922. Δέκα χρόνια μετά επέστρεψε και έμεινε εκεί μέχρι το τέλος της ζωής του το 1950.

Το επιστημονικό του έργο δεν έμεινε περιορισμένο μόνο στα Μαθηματικά. Σημαντική ήταν η συνεισφορά του στη Φυσική και την Αρχαιολογία.

Πριν ασχοληθεί επαγγελματικά με τα Μαθηματικά είχε συναναστραφεί με πολλούς αρχαιολόγους στο πλαίσιο της εργασίας του ως μηχανικός στην Αίγυπτο. Από μικρή ηλικία έδειχνε μεγάλο ενδιαφέρον για τα αρχαία μνημεία και αυτός ήταν ένας από τους παράγοντες που τον οδήγησε στα Μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, μία από τις πρώτες έρευνες του η οποία είχε μαθηματικό χαρακτήρα ήταν η μέτρηση των διαστάσεων της κεντρικής εισόδου της πυραμίδας του Χέοπα. Λέγεται ότι χάρη σε αυτή τη μελέτη αποφάσισε να σπουδάσει Μαθηματικά. Η Αρχή του Καραθεοδωρή έγινε βάση για μια νέα διατύπωση του 2ου νόμου της Θερμοδυναμικής.

Αξιομνημόνευτη ήταν η σχέση του με τον Αϊνστάιν και η αλληλογραφία που αντήλλασσαν : «Αν θέλετε να μπείτε στον κόπο να μου εξηγήσετε ακόμα και τους κανονικούς μετασχηματισμούς θα βρείτε έναν ευγνώμονα και ευσυνείδητο ακροατή. Αν όμως λύσετε και το πρόβλημα των κλειστών γραμμών του χρόνου, θα σταθώ μπροστά σας με σταυρωμένα χέρια. Πίσω από αυτό υπάρχει κρυμμένο κάτι που είναι αντάξιο του ιδρώτα των καλυτέρων.»

*Επιστολή του Αϊνστάιν προς τον Καραθεοδωρή, 1916*

Από αυτή την επιστολή γίνεται φανερή η συνεισφορά της ιδιοφυΐας του Καραθεοδωρή στο έργο του πιο διάσημου φυσικού όλων των εποχών, καθώς ο Αϊνστάιν ήθελε βοήθεια για την ανάπτυξη της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Βιβλία, χειρόγραφες επιστολές, όπως η προηγούμενη, όχι μόνο προς τον Αϊνστάιν αλλά και άλλους διακεκριμένους επιστήμονες, μπορούμε να βρούμε στο μουσείο Καραθεοδωρή στην Κομοτηνή,

το οποίο εγκαινιάστηκε το 2009 και αποτελεί έναν προορισμό όχι μόνο για αυτούς που αγαπούν τα μαθηματικά αλλά και όσους θέλουν να θαυμάσουν μια ξεχωριστή προσωπικότητα των δύο προηγούμενων αιώνων.

*Παναγιώτης Βαγδούτης γ1*
*Μορφέας Γεωργακόπουλος γ2*
*Διονύσης Γεωργουλόπουλος γ2*

## Η εκδρομή μας στη Σάμο

Κατά το σχολικό έτος 2022-2023 η Μαθηματική Σκέψη της β' και γ' γυμνασίου του Κολλεγίου Αθηνών πραγματοποίησε σε συνεργασία με το Μουσικό Σχολείο Σάμου μία τριήμερη εκδρομή στο όμορφο ακριτικό νησί μας. Στόχος του ταξιδιού αυτού, ήταν τόσο η πνευματική μας καλλιέργεια, όσο και η ευρύτερη επαφή μας με το αιγαιοπελαγίτικο νησί και την ιστορία του. Κατά την διάρκεια της παραμονής μας παρακολουθήσαμε ενδιαφέρουσες ομιλίες ποικίλου περιεχομένου, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που έλαβαν χώρα κατά τη διάρκεια του συνεδρίου που πραγματοποιήθηκε στο πολιτιστικό κέντρο του Βαθέος ως συνδιοργάνωση των δύο σχολείων. Μία εξ' αυτών ήταν αφιερωμένη στο μονόχορδο, ένα παραδοσιακό σαμιώτικο μουσικό όργανο, το οποίο συνδέεται άμεσα με τον Πυθαγόρα και χρησιμοποιήθηκε για τον καθορισμό των μαθηματικών σχέσεων των μουσικών ήχων. Οι Πυθαγόρειοι κατέληξαν πως οι ακέραιοι και τα κλάσματα ελέγχουν όχι μόνο τον άψυχο, αλλά και τον έμψυχο κόσμο μέσω της μουσικής. Αξιοσημείωτη ήταν, επίσης, η ομιλία για τον αριθμό π από τον καθηγητή του Πανεπιστημίου Αιγαίου κ. Μεταφτσή Βασίλειο που έλαβε χώρα στη βιβλιοθήκη του πανεπιστημίου στο Καρλόβασι. Παράλληλα, επισκεφτήκαμε πλήθος μουσείων, αρχαιολογικών χώρων και αξιοσημείωτων τοποθεσιών της περιοχής, όπως το Ηραίον, το Ευπαλίνειο Όρυγμα, το παλαιοντολογικό μουσείο, το μουσείο οίνου και άλλα. Αποκορύφωμα της επίσκεψής μας αποτέλεσε η συναναστροφή και γνωριμία μας με τους μαθητές του Μουσικού Σχολείου, καθώς και οι κοινές δράσεις που πραγματοποιήσαμε. Η συμμετοχή μας σε αυτήν την εκδρομή μας επέτρεψε να διευρύνουμε τους ορίζοντές μας και να αντιληφθούμε καλύτερα την έννοια της οικουμενικής συνύπαρξης, μία έννοια που προβάλλεται συχνά μέσα από πληθώρα δράσεων του σχολείου μας.

*Αναστασία Γαλάνη γ2, Μαρίνα Γιαννακοπούλου γ2*


## Το αίνιγμα της Σφίγγας

Θα μπορούσε άραγε κανείς να ισχυριστεί ότι κατέχει όλα τα Μαθηματικά; Αυτό θα ήταν πρακτικά αδύνατο, ακατόρθωτο, ύβρις! Όλα τα Μαθηματικά δεν τα γνωρίζει κανένας. Δεν αμφισβητείται βέβαια πως μπορεί να ασχολείται με αυτά, όμως είναι φύσει αδύνατο να τα κατακτήσει. Τα Μαθηματικά αποτελούν ένα Μυστήριο. Μία πολύ δύσκολη Εξίσωση. Ένα Αίνιγμα!

Τι ορίζουμε λοιπόν ως ***Αίνιγμα***; Όπως έλεγαν και οι αρχαίοι ἡμῶν πρόγονοι «Αἰνίγματα γάρ ἐστι τὰ διὰ τῶν ἐναντίων δηλούμενα». Το αίνιγμα είναι η αναφορά των ιδιοτήτων και των γνωρισμάτων ενός αντικείμενου, χωρίς ν' αναφέρεται το ίδιο το αντικείμενο. Για να αντιληφθούμε καλύτερα τον ορισμό του Αινίγματος, ας δούμε ένα παράδειγμα που μας ταξιδεύει πολύ παλιά στο χρόνο.

Σύμφωνα με τη μυθολογία, ο Λάιος και η Ιοκάστη αποτελούσαν το βασιλικό ζεύγος της Θήβας. Ισχυρή επιθυμία τους υπήρξε να φέρουν στον κόσμο τον διάδοχο του Βασιλιά. Όμως, ο βασιλιάς και η βασίλισσα δεν μπορούσαν να τεκνοποιήσουν. Έτσι, αποφάσισαν να λάβουν τις προφητείες της Πυθίας. Ο χρησμός ήταν τόσο ευχάριστος για το βασιλικό ζεύγος, καθώς έμαθαν ότι στο μέλλον θα αποκτήσουν έναν γιο, τον οποίο θα ονομάσουν Οιδίποδα. Όμως, ο χρησμός έληξε αναπάντεχα, όταν η Πυθία ανακοίνωσε στον βασιλιά ότι ο γιος του θα τον εκθρονίσει και θα τον σκοτώσει. Με κάθε τρόπο, η εγκυμοσύνη προσπάθησε να αποφευχθεί, παρόλα αυτά ο Οιδίποδας

γεννήθηκε, όμως αφέθηκε στο δάσος, αφού σύντομα θα απειλούσε τον βασιλικό θρόνο.

Μεγάλωσε στο πλάι ενός βοσκού, μη γνωρίζοντας την βασιλική του καταγωγή. Σύντομα, ενηλικιώθηκε και έλαβε μέρος στη πρώτη του ένοπλη σύγκρουση κοντά στη Θήβα. Στο σημείο αυτό, έμελλε να επιβεβαιωθούν οι μαντικοί χρησμοί. Ο Οιδίποδας, νίκησε τον αντίπαλο εχθρό, ο οποίος δεν ήταν άλλος από τον Λάιο. Μη γνωρίζοντας ποιον είχε σκοτώσει, κατέφθασε στη Θήβα, όμως η είσοδος δεν ήταν προσβάσιμη.

Προκειμένου να εξασφαλίσει άσυλο στην πόλη μετά τη μάχη, όφειλε να λύσει το Αίνιγμα της Σφίγγας. Η Σφίγγα ήταν μία τερατόμορφη μορφή, με κεφάλι γυναίκας, σώμα λιονταριού και φτερά αετού, η οποία είχε οριστεί από τους θεούς Ήρα και Άρη φύλακα της πόλης. Επιπλέον, ήταν υπεύθυνη για την εξασφάλιση του νερού της πόλης και για αυτό θυσιάζονταν προς τιμήν της, κάθε χρόνο, δέκα αγόρια. Όποιος περαστικός αδυνατούσε να απαντήσει στο Αίνιγμα, θανατώνονταν.

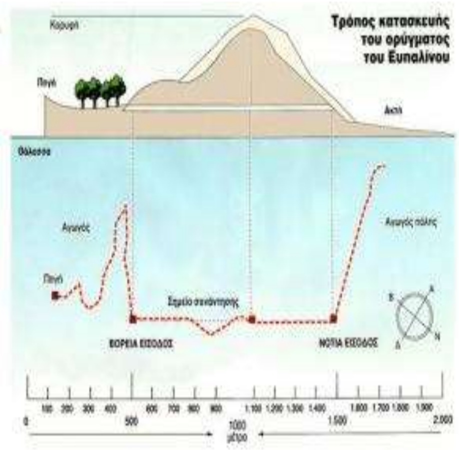
Όπως αναφέραμε προηγουμένως, το Αίνιγμα είναι η παρουσίαση ενός προβλήματος που απαιτεί οξυδέρκεια για να λυθεί και το οποίο δεν αναφέρεται ρητά. Η πολυπόθητη ερώτηση που καθόριζε την τύχη των περαστικών ήταν η εξής: «Τί έστι τὸ αὐτὸ δίπουν, τρίπουν, τετράπουν;» *Ποιο ον στην αρχή στέκεται στα τέσσερα, έπειτα στα δύο και προς το τέλος της ζωής του στα τρία;* Εσείς μπορείτε να απαντήσετε;

Ο Οιδίποδας, σύμφωνα με την μυθολογία τα κατάφερε. Η απάντησή του ήταν **ο άνθρωπος**. Έτσι, οι κάτοικοι της Θήβας για να επιβραβεύσουν τον πρώτο που βρήκε τη σωστή λύση στο Αίνιγμα, τον έστεψαν βασιλιά και παντρεύτηκε τη βασίλισσα, την ίδια του τη μητέρα. Η Σφίγγα εξαφανίστηκε και κάπου εδώ η ιστορία μας τελειώνει. Με τη λύση του Αινίγματος που απασχολούσε όλους τους περαστικούς ταξιδιώτες και τελικά βρέθηκε η απάντηση, πιστεύουμε ότι ο άνθρωπος κάποια μέρα θα κατακτήσει τα μαθηματικά και θα πάψουν να αποτελούν και αυτά ένα Αίνιγμα.

*Οδυσσέας Λυμπερόπουλος γ7*

## Ευπαλίνειο Όρυγμα

Με αφορμή την περσινή επίσκεψη της Μαθηματικής Σκέψης στη Σάμο, μοιραζόμαστε μαζί σας τις εμπειρίες μας αλλά και την μοναδικότητα του Ευπαλίνειου Ορύγματος, που σύμφωνα με τον Ηρόδοτο αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα έργα στην ιστορία της μηχανικής . Από το 1992 έχει χαρακτηριστεί από την UNESCO Μνημείο Παγκόσμιας Πολιτιστικής Κληρονομιάς, ενώ το 2015 ανακηρύχθηκε από την Διεθνή Ένωση Σηράγγων ως «Παγκόσμιο Σηραγγολογικό Τοπόσημο».




Το Ευπαλίνειο Όρυγμα αποτελείται από μια σήραγγα μήκους 1.036 μέτρων, η οποία κατασκευάστηκε κατά τον 6ο αιώνα π.Χ. και είναι τμήμα του αρχαίου υδραγωγείου, που μετέφερε νερό από την σημερινή τοποθεσία Αγιάδες προς το σημερινό Πυθαγόρειο στην νότια πλευρά της Σάμου.

Το συγκεκριμένο έργο φτιάχτηκε στα χρόνια του τύραννου Πολυκράτη από τον αρχιτέκτονα Ευπαλίνο και διανοίχθηκε ταυτόχρονα και από τις δύο πλευρές του βουνού (“Αμφίστομο Όρυγμα” κατά τον Ηρόδοτο), δηλαδή δύο σήραγγες η μία από τα βόρεια και η άλλη από τα νότια που συναντήθηκαν 180 μέτρα, κάτω από την κορυφή του μικρού όρους Κάστρο.

Είναι εντυπωσιακός, ακόμα και σήμερα, ο τρόπος με τον οποίο οι αρχαίοι Σάμιοι έκαναν με ακρίβεια τις μετρήσεις, ώστε να πετύχουν να συναντηθούν τα δύο ανοίγματα στο βουνό χωρίς μεγάλη παρέκκλιση.

Ο Ευπαλίνος πρώτα διερεύνησε ποια ήταν η προτιμότερη διαδρομή για την σήραγγα, δηλαδή από τις πηγές νερού προς την πόλη, καθώς θεωρητικά υπήρχαν δεκάδες. Έτσι σκέφτηκε η υπόγεια σήραγγα να φτάνει στο δυτικό κομμάτι της πόλης (Πυθαγόρειο), γιατί εκεί ήταν πιο ήπια η κλίση του βουνού που χώριζε τις Αγιάδες από το Πυθαγόρειο, ενώ αντίστοιχα το βόρειο στόμιο της σήραγγας ήταν στο σημείο του βουνού με την ήπια κλίση.

Οι μηχανικοί του Ευπαλίνου αρχικά χάραξαν μια ευθεία γραμμή στην επιφάνεια της Γης, ανάμεσα στα δύο στόμια της σήραγγας που τους είχαν υποδείξει οι ήπιες κλίσεις στην επιφάνεια. Εκεί τοποθέτησαν κοντάρια, ώστε να ελέγξουν την ευθυγράμμιση. Κατά την εκσκαφή, οι μηχανικοί τοποθέτησαν αρχαίους λύχνους (φανάρια) στο δάπεδο της σήραγγας, ώστε βλέποντας τον έναν μετά τον άλλον, να ελέγχεται η ευθυγράμμιση, και έτσι οι δύο άξονες, αυτός των κονταριών (πάνω στην γη) και αυτός των λύχνων (μέσα στην σήραγγα) να συμπίπτουν σε μια ευθεία γραμμή. Η αλφαδιά (επιπεδότητα) του πυθμένα του ορύγματος ελεγχόταν με χωροβάτη, δηλαδή ένα όργανο που μοιάζει με σωλήνα κομμένο στη μέση και περιέχει νερό. Όταν ο σωλήνας είναι επίπεδος, το νερό φτάνει στο ίδιο ύψος στα δύο άκρα του. Εικάζεται, μάλιστα, ότι ένας τεράστιος χωροβάτης χρησιμοποιήθηκε στην Σάμο ώστε να οριστούν τα δύο στόμια της σήραγγας στις δύο διαμετρικά αντίθετες πλευρές του βουνού, και μερικοί πιστεύουν ότι κατασκευάστηκε ένα πρόχειρο κανάλι γύρω από το βουνό, ώστε να ελεγχθεί το υψόμετρο στα δύο στόμια. Αν αυτά ήταν στο ίδιο τοπογραφικό ύψος, όταν το κανάλι ήταν γεμάτο, δεν θα έρεε νερό. Όσο προχωρούσε η σήραγγα, οι τεχνίτες σημάδευαν με μπογιά τα τοιχώματα κάθε δέκα οργυιές, (1 οργιά=1,83 μ.). Ο Ευπαλίνος σε ένα σημείο έγραψε στα τοιχώματα την λέξη «ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ», εννοώντας υπόδειγμα, για να μας δείξει πόσο περήφανος ένιωθε για ένα ιδιαίτερα σημαντικό επίτευγμα για τα τεχνολογικά δεδομένα της εποχής. Πέραν της γεωμετρικής τελειότητας, πρέπει να αναλογιστεί κανείς ότι χωρίς χωματουργικά ή σκαπτικά μηχανήματα, οι τεχνίτες μετέφεραν τους βράχους και τις πέτρες της εκσκαφής με τα χέρια μέσα σε καλάθια στα στόμια των δύο σηράγγων.

Αυτό που είναι πραγματικά αξιοθαύμαστο είναι ότι στη βόρεια σήραγγα (που ξεκινούσε από τις πηγές) χρειάστηκε μια μικρή παράκαμψη από την ευθεία γραμμή προς το νότιο στόμιο, μάλλον λόγω σαθρότητας των πετρωμάτων, που δεν θα επέτρεπε να σταθεροποιηθεί η σήραγγα. Η γεωμετρική γνώση που χρειαζόταν κάτι τέτοιο είναι άξια λόγου για την επιτυχή ένωση των δύο σηράγγων.

Ο πυθμένας της σήραγγας κατασκευάστηκε οριζόντιος. Αφού τελείωσε στο εσωτερικό της σήραγγας δίπλα στο ανατολικό τοίχωμα σκάφτηκε ένα αυλάκι (χάνδακας) για τη μεταφορά του νερού, που χωρίς αντλίες δεν μπορούσε να μεταφερθεί οριζόντια. Στο βόρειο στόμιο της σήραγγας, όπου ξεκινούσε το νερό, το εσωτερικό αυλάκι είχε βάθος 3 μέτρα ενώ στο νότιο περίπου 9 μέτρα, δηλαδή το κανάλι είχε κλίση περίπου 6 στα 1000, και βάθαινε από τον βορά προς τον νότο. Μέσα στο αυλάκι

*“ΛΟΓΙΣΜΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΛΗΘΟΥΣ ΕΝΕΚΕΝ,*

*ΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΝ ΠΛΕΙΣΤΩΝ, ΥΔΩΡ ΑΦΘΙΤΟΝ ΕΙΣ ΚΡΗΝΑΣ*

*ΣΑΜΙΩΝ ΚΑΤΕΡΧΕΤΑΙ“*

τοποθετήθηκαν πήλινοι σωλήνες που μετέφεραν το νερό. Η κατασκευή υπολογίζεται ότι διήρκεσε 8-10 χρόνια, όσο περίπου διήρκεσε η κατασκευή του Παρθενώνα 100 περίπου χρόνια αργότερα.

Έτσι, το όρυγμα με ασφάλεια οδηγούσε το νερό στην πόλη της Σάμου, χωρίς να κινδυνεύει να εντοπιστεί και να καταστραφεί από εξωτερικούς εχθρούς, για αυτό άλλωστε και τα δύο στόμια ήταν καλά κρυμμένα. Ακόμη και σήμερα η πρόσβαση στο όρυγμα είναι δύσκολη. Το όρυγμα χρησιμοποιήθηκε μάλλον για τελευταία φορά στους βυζαντινούς χρόνους και μετά «χάθηκε» μέχρι τον 19ο αιώνα, όπου ένας μοναχός ανακάλυψε τυχαία το βόρειο στόμιο.

Οι επιστήμονες σήμερα ασχολούνται συστηματικά με το όρυγμα προσπαθώντας να στοιχειοθετήσουν βάση της Γεωμετρίας αλλά και της Υδραυλικής την κατασκευή του, και να βγάλουν συμπεράσματα για την μαθηματική σκέψη των αρχαίων, αλλά και για τις κατασκευές τους. Προφανώς ότι αναφέρουμε εδώ είναι εικασίες ερευνητών, καθώς δεν υπάρχουν σχέδια του αρχιτέκτονα.

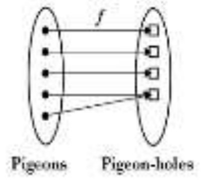
Το κείμενο μας βασίστηκε στην επίσκεψη του Ομίλου στη Σάμο, σε ντοκυμαντέρ του Caltech με τον περίφημο Καθηγητή Μαθηματικών Τομ Άποστολ (ελληνιστί Αποστολόπουλος) που δίδασκε calculus και πρωτοστάτησε στην δημιουργία της σειράς ντοκυμαντέρ «Project MATHEMATICS!» και σε σύντομο ντοκυμαντέρ του ΣΤΕΑΤ με τίτλο «Τα Μαθηματικά Υδρεύουν τη Σάμο», που τελειώνει με την επιγραφή στην αρχή του άρθρου η οποία δεν γνωρίζουμε αν είναι του Ηροδότου.

*Μαίρη Συνολάκη γ8, Γεωργία Χάσκου γ9*

## Αρχή Περιστεροφωλιάς

Έχεις αναρωτηθεί ποτέ ποια είναι η πιθανότητα να έχεις την ίδια ημερομηνία γενεθλίων με έναν συμμαθητή σου; Την απάντηση σε αυτό, όπως και σε άλλα ερωτήματα, την δίνει η αρχή της περιστεροφωλιάς.

Πολλά ωραία προβλήματα λογικής βασίζονται στην «Αρχή της περιστεροφωλιάς». Σύμφωνα με την πρόταση αυτή: «Αν ν+1 περιστέρια καθίσουν σε ν φωλιές, τότε σε μία τουλάχιστον φωλιά θα καθίσουν τουλάχιστον 2 περιστέρια».




Πως όμως μια τόσο απλή, στη διατύπωσή της, αρχή δίνει απαντήσεις σε μια σειρά από θέματα και σπαζοκεφαλιές; Ας δούμε μερικά παραδείγματα να καταλάβουμε τον τρόπο λειτουργίας της παραπάνω πρότασης.

Εάν είχαμε 10 μήλα, δεν θα μπορούσαμε να τα βάλουμε σε 9 καλάθια, εάν το κάθε καλάθι χωρούσε μόνο ένα μήλο.

Εφόσον ο πληθυσμός της Αθήνας είναι μεγαλύτερος από τον μέγιστο πιθανό αριθμό τριχών στα μαλλιά ενός ανθρώπου (περίπου 4 εκ. κάτοικοι έναντι 150 χιλ. τριχών), έπεται ότι υπάρχουν πάνω από δύο άνθρωποι που έχουν τον ίδιο αριθμό τριχών στα μαλλιά τους.

Σε κάθε τμήμα του γυμνασίου μας υπάρχουν τουλάχιστον 4 μαθητές που γεννήθηκαν την ίδια μέρα της εβδομάδας. Δεδομένου ότι όλα τα τμήματα του γυμνασίου έχουν τουλάχιστον 23 μαθητές (περιστέρια) οι οποίοι πρέπει να κατανεμηθούν στις 7 μέρες τις εβδομάδες (φωλιές) έχουμε $23 = 7 * 3 + 2$. Άρα μπορούμε να φτιάξουμε το πολύ επτά τριάδες μαθητών που έχουν γεννηθεί σε όλες τις μέρες της εβδομάδας και οι 2 τελευταίοι μαθητές που απομένουν αναγκαστικά θα πρέπει να κατανεμηθούν σε μία ή δύο μέρες δημιουργώντας έτσι μια τουλάχιστον ομάδα με 4 μαθητές.

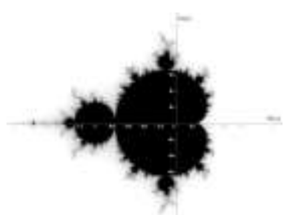
Σε μια συνάντηση 367 μαθητών υπάρχουν τουλάχιστον δυο που γεννήθηκαν την ίδια ημερομηνία. Φανταζόμαστε ότι αυτό που μας ζητείται (δηλαδή οι ημερομηνίες ενός χρόνου) είναι "φωλιές" ή "κουτιά" στα οποία θα τοποθετήσουμε τους 367 μαθητές. Μοιράζουμε τους μαθητές στα κουτιά. Προφανώς αφού μπουν οι 365 (ή 366 αν είναι δίσεκτος ο χρόνος) ένας τουλάχιστον θα περισσέψει άρα θα μπει σε "κουτί" (ημερομηνία) μαζί με κάποιον άλλο.

Τώρα, πώς συνδέεται αυτή η έννοια με το παράδοξο των γενεθλίων; Στο παράδοξο αυτό, μπορεί να φαίνεται παράξενο ότι δεν χρειάζονται αρκετοί άνθρωποι ώστε να βρεθούν δύο άτομα με κοινά γενέθλια σε ένα δωμάτιο παρά το γεγονός ότι υπάρχουν 365 (ή 366) διαφορετικές μέρες. Η πιθανότητα αυτού του σεναρίου αυξάνεται σε μια ομάδα ατόμων που συνεχώς αυξάνεται. Ένα παράδειγμα είναι ξανά οι μαθητές σε ένα τμήμα του γυμνασίου μας. Η πιθανότητα τουλάχιστον δύο άτομα να έχουν την ίδια ημέρα γενεθλίων ανάμεσα σε κ άτομα είναι:

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-\kappa)! * 365^{\kappa}}$$

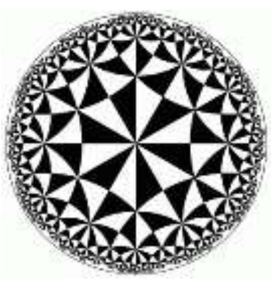
### “Διασχίζω συνεχώς τα σύνορα μαθηματικών και τέχνης”

Είναι πολύ πιθανό κάποια στιγμή στη ζωή σας να έχετε δει το τρίγωνο Σιερπίνσκι (1η εικόνα). Όπως παρατηρείτε το τρίγωνο αυτό παρουσιάζει ένα επαναλαμβανόμενο σχηματικό μοτίβο, το οποίο συνεχίζει αυτούσιο όσο κι αν μεγεθυνθεί το αρχικό σχήμα. Τα γεωμετρικά αυτά σχήματα ονομάζονται φράκταλ ή μορφοκλάσματα. Ο όρος αυτός προτάθηκε από τον Μπενουά Μάντελμπροτ το 1975. Χαρακτηριστικό των φράκταλ είναι η λεγόμενη αυτο-ομοιότητα σε κάποιες δομές τους, η οποία εμφανίζεται σε διαφορετικά επίπεδα μεγέθυνσης.



Ένα από τα πιο γνωστά φράκταλ είναι το σύνολο Μαντελμπροτ, το οποίο ορίστηκε για πρώτη φορά το 1978 από τους Ρόμπερτ Γ. Μπρουκς και Πίτερ Ματέλσκι. Το όνομά του το πήρε από τον Μπενουά Μάντελμπροτ, ο οποίος κατάφερε να το αναπαραστήσει οπτικά με πολύ καλή ανάλυση το 1980(2η εικόνα).

Ο Μαουρίτς Κορνέλις Έσερ, ένας Ολλανδός καλλιτέχνης με έφεση στη γεωμετρία, φιλοτέχνησε έργα που ομοιάζουν πολύ τα φράκταλς. Ο ίδιος αναφέρει: “Διασχίζω συνεχώς τα σύνορα μαθηματικών και τέχνης”. Στα έργα του ενσωματώνονται πλήθος μαθηματικών εννοιών και οπτικών παραδόξων, γεγονός που προσελκύει την προσοχή του κόσμου και συνάμα καθιστά για πολλούς τα έργα του δυσνόητα. Χαρακτηριστικό του έργο είναι το “Circle Limit III” (3η εικόνα), μια ξυλογραφία που κατασκευάστηκε το 1959 και αναπαριστά ένα επαναλαμβανόμενο σχέδιο ψαριών. Ο Έσερ εμπνεύστηκε για το έργο του αυτό από ένα σχέδιο του Χάρολντ Σκοτ Μακντόναλντ Κόξετερ, εκείνο της 4ης εικόνας. Ένα σύνολο άπειρων τριάδων ψαριών που κοιτούν σε ένα κοινό σημείο καλύπτουν την επιφάνεια ενός κύκλου, ο οποίος αναπαριστά ένα ημισφαίριο. Τα ψάρια μοιάζουν να αναδύονται από τα άκρα του κύκλου, ενώ το μοτίβο που παρουσιάζεται συνεχίζει αυτούσιο μέχρι το άπειρο προς όλες τις κατευθύνσεις. Το γεγονός αυτό προσδίδει αίσθηση βάθους και απεραντοσύνης. Το “Circle Limit III” συνδυάζει μαθηματικά με τέχνη, αποδίδοντας την ιδιαίτερη αντίληψη του Έσερ για τον χώρο και τη γεωμετρία.



Τα υπερβολικά πλακάκια του Κόξετερ (η φιγούρα αυτή δείχνει μια ψηφίδα του υπερβολικού επιπέδου* χρησιμοποιώντας ορθογώνια τρίγωνα με γωνίες 30°, 45° και 90°)

* Υπερβολική γεωμετρία: μια μη Ευκλείδεια γεωμετρία, δηλαδή μια γεωμετρία στην οποία ορισμένα από τα αξιώματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας δεν ισχύουν.

*Γαλάνη Αναστασία γ2, Γιαννακοπούλου Μαρίνα γ2*

Για κ=23 άτομα,

$$P = 1 - \frac{365!}{(365-23)! * 365^{23}} \approx 50{,}7\%$$

Άρα, για τους 23 μαθητές των τάξεων του σχολείου μας, η πιθανότητα δύο άτομα να έχουν την ίδια ημερομηνία γενεθλίων είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από 50%.

Η αρχή της περιστεροφωλιάς στο προηγούμενο παράδοξο λειτουργεί ως εξής: κατανέμουμε τα 23 άτομα σε διαφορετικές μέρες και υπολογίζουμε την πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου (όλοι να έχουν διαφορετικά γενέθλια). Στη συνέχεια αφαιρούμε την πιθανότητα αυτήν από την μονάδα, που αποτελεί το 100% - βέβαιο ενδεχόμενο, ώστε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του συμπληρωματικού ενδεχομένου, δηλαδή τουλάχιστον δύο από τους 23 μαθητές να έχουν γεννηθεί την ίδια μέρα.

*Δημήτρης Μανιουδάκης γ6, Ιορδάνης Μιχαλακάκος γ6, Αιμίλιος Τσοτσόπουλος γ9*

## Οι Καμπύλες του Gauss

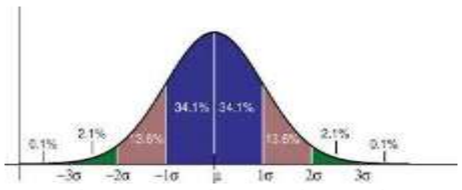
Ο Carl Gauss (30 Απριλίου 1777- 23 Φεβρουαρίου 1855) ήταν Γερμανός μαθηματικός που συνεισέφερε σε διάφορα πεδία της επιστήμης, όπως η θεωρία αριθμών, η στατιστική, η διαφορική γεωμετρία, η γεωδαισία, η αστρονομία και η φυσική.

<u>Η κωδωνοειδής καμπύλη του Gauss</u>

Η σημαντικότερη κατανομή πιθανότητας, τόσο από θεωρητική, όσο και από άποψη εφαρμογών είναι η κανονική κατανομή.

Χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τους Abraham De Moivre και Pierre Laplace ως προσέγγιση της αντίστοιχης διωνυμικής για μεγάλο δείγμα. Ο Carl Gauss ο οποίος διατύπωσε τη θεωρία των τυχαίων σφαλμάτων χρησιμοποίησε την κανονική κατανομή ως προσέγγιση αυτών. Η συμβολή των παραπάνω μαθηματικών στη μελέτη αυτής της κατανομής υπήρξε μεγάλη. Για το λόγο αυτό η κατανομή αυτή αναφέρεται και ως κατανομή των Gauss-Laplace ή Γκαουσιανή. Η ονομασία κανονική είναι πολύ μεταγενέστερη και οφείλεται στον Pearson.

Η Κατανομή Gauss είναι μια συμμετρική κατανομή πιθανότητας, μοιάζει σε σχήμα με




καμπάνα και έχει έναν άξονα συμμετρίας στη μέση.

Οι «ουρές» της κωδωνοειδούς αυτής καμπύλης πλησιάζουν τον οριζόντιο άξονα ομαλά (ασυμπτωτικά). Η μέση τιμή (μέσος όρος) και η διάμεσος (η μεσαία παρατήρηση από διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά παρατηρήσεις) ταυτίζονται. Επίσης, η επικρατούσα τιμή (η τιμή με την μεγαλύτερη συχνότητα) ταυτίζεται με τη μέση τιμή και τη διάμεσο. Έτσι, η περιοχή που παρουσιάζει τη μεγαλύτερη συγκέντρωση παρατηρήσεων βρίσκεται στο μέσο της κατανομής.

Όταν οι τιμές μιας μεταβλητής είναι κανονικά κατανεμημένες, τότε γύρω από τη μέση τιμή τους υπάρχουν σχετικά πολλές τιμές ενώ μακριά από τη μέση τιμή βρίσκονται σχετικά λιγότερες.

Εάν πάρουμε ένα μεγάλο και σωστά επιλεγμένο δείγμα από έναν πληθυσμό και μετρήσουμε διάφορες παραμέτρους, όπως το βάρος ή το ύψος των ανδρών, θα παρατηρήσουμε ότι οι περισσότερες τιμές συγκεντρώνονται ανάμεσα στα 170-180εκ. για το ύψος και αντίστοιχα 75 κιλά για το βάρος. Αυτό συμβαίνει γιατί οι περισσότεροι άνθρωποι είναι κοντά στον μέσο όρο. Επομένως, όσο απομακρυνόμαστε από αυτή την τιμή, είτε προς τα πάνω , είτε προς τα κάτω, θα παρουσιάζονται όλο και λιγότερες παρατηρήσεις καθώς ελάχιστοι άνδρες έχουν ύψος πάνω από 2 μέτρα ή βάρος λιγότερο από 50 κιλά. Αυτή η κατανομή των παρατηρήσεων ένος πληθυσμού ή δείγματος περιγράφεται από την καμπύλη του Gauss.

Στην πρόσφατη εκπαιδευτική εκδρομή μας στη Βαρκελώνη, κατά την επίσκεψή μας στο μουσείο των μαθηματικών (MMACA), ανάμεσα σε άλλες δραστηριότητες ξεναγηθήκαμε στην αίθουσα στατιστικής. Σε ένα από τα εκθέματα που βλέπουμε στην φωτογραφία κάθε φορά που περιστρέφουμε τον κυκλικό δίσκο οι μπίλιες πέφτοντας κατανέμονται σχεδόν με πανομοιότυπο τρόπο, απεικονίζοντας την «καμπάνα» της κανονικής κατανομής. Στις μεσαίες στήλες πέφτει περίπου το 68% των μπιλιών, ενώ στις δύο επόμενες εκατέρωθεν των μεσαίων περιπού το 27% αυτών. Στις ακριανές στήλες

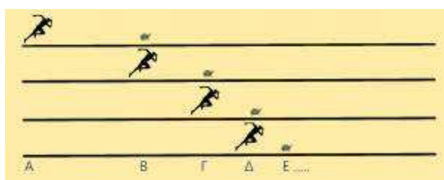
μπαίνουν πολύ λίγες μπίλιες, που όσες φορές και αν επαναλάβαμε το πείραμα αντιστοιχούσε στο 4,5% αυτών.

*Δημήτρης Γεωργίου γ2, Μαθιός Ζαμπίκος γ3*

> “τα Μαθηματικά είναι η βασίλισσα των επιστημών και η θεωρία αριθμών η βασίλισσα των Μαθηματικών“
>
> Carl Gauss

## Ο Αχιλλέας και η Χελώνα

Κάπου τον 12ο αιώνα π.Χ. μία χελώνα προκάλεσε τον Αχιλλέα σε αγώνα ταχύτητας. Ο Αχιλλέας, προκειμένου να είναι δίκαιος ο αγώνας, της έδωσε προβάδισμα 100 μέτρων . Όμως, κατά την διάρκεια ενός αγώνα δρόμου 500 μέτρων ο Αχιλλέας δεν μπόρεσε να ξεπεράσει την χελώνα! Αρχικά, έτρεξε τα 100 μέτρα που τον χώριζαν από την χελώνα αλλά εκείνη που έτρεχε με το 1/10 της ταχύτητας του Αχιλλέα είχε διανύσει 10 μέτρα. Όταν ο Αχιλλέας διήνυσε και



αυτή την απόσταση η χελώνα ήταν ήδη μπροστά στο 1/10 της απόστασης που είχε κάνει. Έτσι, ο Αχιλλέας δεν μπόρεσε ποτέ να φτάσει, ούτε να την ξεπεράσει παρότι αυτή ήταν πιο αργή από εκείνον.

Αυτό το παράδοξο διατύπωσε ο Ζήνων ο Ελεάτης (490π.Χ.~430π.Χ.) , φιλόσοφος της Ελεατικής σχολής, που πίστευε πως η εμπειρία δεν θα μπορούσε να θεωρηθεί επιστημονικό τεκμήριο αλλά πως τα πάντα για να θεωρηθούν αλήθεια έπρεπε να αποδειχθούν με την λογική. Έτσι, με αυτή την ιδέα, ο Ζήνων προσπάθησε να αποδείξει πως η κίνηση ήταν μία ψευδαίσθηση, και ο τρόπος με τον οποίο απέδειξε, ή προσπάθησε να αποδείξει αυτό ήταν με τα παράδοξά του. Πιο γνωστό από αυτά τα παράδοξα ήταν το παράδοξο του Αχιλλέα και της Χελώνας. Αυτό το παράδοξο δεν μπόρεσε να το διαψεύσει κανένας και για αυτό το λόγο το ανέφερε και ο Αριστοτέλης στο έργο του «Φυσικής Ακροάσεως» στο οποίο ο Αριστοτέλης διατύπωσε τις γενικές αρχές των φυσικών φαινομένων. Ο Αριστοτέλης προσπάθησε να απαντήσει στο παράδοξο του Αχιλλέα και της Χελώνας, στο 6ο κεφάλαιο του έργου του. Ο Αριστοτέλης είπε πως ο χρόνος και η θέση δεν μπορούν να διαιρεθούν επειδή είναι συνεχή και άπειρα. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη δεν υπάρχει μία συγκεκριμένη στιγμή στην οποία η κίνηση ξεκινάει αφού ο χρόνος μπορεί να διαιρεθεί απείρως. Έτσι, δεν διέψευσε το παράδοξο αλλά θεώρησε πως η έννοιες στις οποίες ήταν βασισμένο ήταν λανθασμένες.

Ας δούμε όμως τι λένε και τα μαθηματικά! Είναι βέβαιο ότι ο Αχιλλέας είναι ταχύτερος από τη χελώνα. Αν υποθέσουμε ότι έχει 10 φορές την ταχύτητα της χελώνας, καθώς θα τρέχει με σταθερή ταχύτητα θα την πλησιάζει διαρκώς διανύοντας τμηματικά την απόσταση

$$S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1000}{9} \approx 111{,}11\text{μέτρα}$$

μέχρι να συναντήσει την χελώνα. Παρατηρούμε ότι το παραπάνω άθροισμα αποτελεί άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το 10 και λόγο 0,1. Άρα με την παραδοχή ότι η χελώνα είναι βραδύτερη μόνο 10 φορές από τον φτεροπόδαρο Αχιλλέα και έχοντας προβάδισμα 100 μέτρων θα τερματίσει πρώτη μόνο αν η συνολική διαδρομή είναι μικρότερη από 111,111 μέτρα , αλλιώς θα τερματίσει πρώτος ο Αχιλλέας.

*Στέφανος Παπακυριακού γ7*